Polynômes du second degré

Classe de Première – Spécialité Mathématiques

Table des matières

I. Définitions et forme canonique

1.1 Fonction polynôme du second degré

Définition 1 *Second degré et racines*

On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ pouvant s'écrire sous la forme réduite :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des réels fixés, avec $a \neq 0$.

On appelle **racine** de ce polynôme tout nombre réel r tel que $f(r) = 0$. Les racines du polynôme sont donc les solutions réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Exemple 1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ est un polynôme du second degré où les coefficients sont $a = 3$, $b = -5$ et $c = 2$. Les réels 1 et $\dfrac{2}{3}$ en sont des racines car $f(1) = 0$ et $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0$.

Méthode 2. **Vérifier si un nombre est racine d'un polynôme**
Pour démontrer qu'un nombre réel donné r est une racine de f, il suffit de calculer directement son image $f(r)$. Le réel r est bien une racine si et seulement si $f(r) = 0$. Il est inutile de calculer le discriminant.

Exercice 3. Montrer que -2 est une racine de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5x^2 + 7x - 6$.

1.2 Forme canonique

Théorème 2 *Forme canonique*

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Cette expression peut s'écrire de manière unique sous la forme dite **canonique** :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

où α et β sont deux réels définis par :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Remarque 4. La forme canonique permet de simplifier l'étude des variations et de la représentation graphique de la fonction.

Exercice 5. Déterminer la forme canonique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$.

II. Résolution d'équations du second degré

2.1 Le discriminant

Définition 3 *Discriminant*

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On appelle **discriminant** de ce polynôme le nombre réel, noté Δ, défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Exemple 6. Pour $f(x) = x^2 - 3x - 4$, on a $a = 1$, $b = -3$ et $c = -4$. On calcule :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25$$

2.2 Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Théorème 4 — *Nombre de solutions et racines*

Soit $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$, et soit $\Delta = b^2-4ac$. Le nombre de solutions réelles de l'équation $f(x) = 0$ dépend uniquement du signe de Δ :

- **Si $\Delta < 0$:** L'équation $f(x) = 0$ n'admet **aucune solution** dans $\mathbb{R}$. Le polynôme n'a donc aucune racine réelle.
- **Si $\Delta = 0$:** L'équation $f(x) = 0$ admet **une unique solution** réelle, notée x_0 (appelée racine double du polynôme), définie par :
$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$
- **Si $\Delta > 0$:** L'équation $f(x) = 0$ admet **deux solutions distinctes** réelles, notées x_1 et x_2 (qui sont les deux racines distinctes du polynôme), définies par :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2-3x-4=0$
2. $x^2-6x+9=0$
3. $2x^2+x+5=0$

Remarque 8. Lorsqu'on doit résoudre une équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ et que $b=0$ ou $c=0$, il n'est pas nécessaire de calculer le discriminant Δ. On gagne un temps précieux en utilisant directement les méthodes de la classe de Seconde (factorisation par x ou isolation du terme en x^2).

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes sans utiliser le discriminant :

1. $3x^2-12=0$
2. $2x^2+8=0$
3. $5x^2+7x=0$

Méthode 10. **Déterminer géométriquement les intersections avec l'axe des abscisses**
Les points d'intersection entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses correspondent exactement aux solutions réelles de l'équation $f(x)=0$. Le signe du discriminant détermine leur nombre :

- Si $\Delta < 0$, la courbe ne coupe jamais l'axe des abscisses.
- Si $\Delta = 0$, la courbe a un unique point d'intersection de coordonnées $(x_0\,;0)$.
- Si $\Delta > 0$, la courbe coupe l'axe en deux points distincts de coordonnées $(x_1\,;0)$ et $(x_2\,;0)$.

Exercice 11. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2-4x+3$ avec l'axe des abscisses.

Méthode 12. **Déterminer l'intersection avec l'axe des ordonnées**
Pour tout point situé sur l'axe des ordonnées, l'abscisse est toujours nulle $(x=0)$. L'intersection d'une

courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées est donc le point unique de coordonnées $(0; f(0))$. Il suffit ainsi de calculer la valeur de $f(0)$.

Exercice 13. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -4x^2 + 7x + 9$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de sa courbe représentative avec l'axe des ordonnées.

III. Factorisation et signe du second degré

3.1 Forme factorisée

Propriété 5 *Factorisation sous condition d'existence des racines*

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, et soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, $f(x)$ ne peut pas se factoriser en produit de polynômes de degré 1.
- Si $\Delta = 0$, en notant x_0 la racine unique du polynôme, $f(x)$ se factorise sous la forme :

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

- Si $\Delta > 0$, en notant x_1 et x_2 les deux racines distinctes du polynôme, $f(x)$ se factorise sous la forme :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Exemple 14. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Son discriminant vaut $\Delta = 1 > 0$ et ses deux racines sont 2 et 3. Sa forme factorisée est $f(x) = 1(x-2)(x-3) = (x-2)(x-3)$.

Exemple 15. Soit g la fonction définie par $g(x) = 3x^2 - 12x + 12$. Son discriminant vaut $\Delta = 0$ et sa racine unique est $x_0 = 2$. Sa forme factorisée est $g(x) = 3(x-2)^2$.

Exercice 16. Déterminer l'expression algébrique d'une fonction polynôme f du second degré telle que $f(2) = 0$, $f(5) = 0$ et $f(4) = 7$.

Méthode 17. Simplifier une fraction rationnelle complexe
Pour simplifier une fraction dont le numérateur ou le dénominateur contient un polynôme du second degré, on commence par déterminer ses racines. Une fois le polynôme écrit sous sa forme factorisée, il devient possible d'identifier et de simplifier un facteur algébrique commun aux deux blocs du quotient.

Exercice 18. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $h(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$. Factoriser son numérateur pour donner une expression simplifiée de $h(x)$ sur son domaine de définition.

3.2 Relations de Viète

Propriété 6 — *Relations de Viète ($\Delta \geqslant 0$)*

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ dont le discriminant Δ est positif ou nul.
En notant x_1 et x_2 ses racines (éventuellement confondues si $\Delta = 0$), alors leur somme S et leur produit P vérifient les relations fondamentales :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Remarque 19. Dans le cas particulier où $\Delta = 0$, le polynôme admet une racine unique x_0. Les relations de Viète s'appliquent en posant simplement $x_1 = x_2 = x_0$, ce qui donne immédiatement $2x_0 = -\frac{b}{a}$ et $x_0^2 = \frac{c}{a}$.

Méthode 20. Déterminer une seconde racine à partir d'une racine évidente
Lorsqu'une racine simple x_1 est visible (souvent $1, -1, 2, -2$), on peut utiliser la relation produit pour trouver immédiatement la seconde racine x_2 sans calculer le discriminant :

$$x_2 = \frac{c}{a \times x_1}$$

Exercice 21. Soit le polynôme du second degré P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 2x^2 - 14x + 12$.

1. Vérifier que 1 est une racine évidente de P.
2. Sans calculer le discriminant, déterminer la valeur de la seconde racine de P.

3.3 Signe du second degré

Théorème 7 — *Tableaux de signes de l'expression $ax^2 + bx + c$*

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, et soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

- **Cas $\Delta < 0$:**

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	

- **Cas $\Delta = 0$:** (où x_0 désigne l'unique racine du polynôme)

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

- **Cas $\Delta > 0$:** (où x_1 et x_2 désignent les deux racines distinctes ordonnées telles que $x_1 < x_2$)

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe opposé de a	0	Signe de a

Exercice 22. Pour chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, dresser le tableau de signes complet puis résoudre l'inéquation associée :

1. $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.
2. $g(x) = -x^2 + 6x - 9$. Résoudre l'inéquation $g(x) > 0$.
3. $h(x) = x^2 + x + 2$. Résoudre l'inéquation $h(x) \geqslant 0$.

3.4 Application à l'étude géométrique : position relative

Méthode 23. **Étudier la position relative de deux courbes**
Pour déterminer la position relative des courbes représentatives de deux fonctions sur un domaine de définition commun, on étudie le signe de la fonction différence, notée d. L'analyse de ses valeurs permet de conclure :

1. **Entre deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$:** On pose $d(x) = f(x) - g(x)$.
   - Sur chaque intervalle I où $d(x) \geqslant 0$, alors $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur I.
   - Sur chaque intervalle I où $d(x) \leqslant 0$, alors $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur I.
   - En chaque réel x_0 où $d(x_0) = 0$, alors $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent au point de coordonnées $(x_0\,;\, f(x_0))$.
2. **Entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$** : $y = mx + p$ **:** On pose $d(x) = f(x) - (mx + p)$.
   - Sur chaque intervalle I où $d(x) \geqslant 0$, alors $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{D}$ sur I.
   - Sur chaque intervalle I où $d(x) \leqslant 0$, alors $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{D}$ sur I.
   - En chaque réel x_0 où $d(x_0) = 0$, alors $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$ se coupent au point de coordonnées $(x_0\,;\, f(x_0))$.

Remarque 24. Pour comparer deux courbes, on ne soustrait jamais les courbes elles-mêmes. On étudie uniquement le signe de la différence entre leurs expressions : $f(x) - g(x)$. On n'écrira jamais de notations incorrectes comme $\mathscr{C}_f - \mathscr{C}_g$ ou $f(x) - y$.

Exercice 25. Étudier la position relative des objets géométriques suivants :

1. La courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ et la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction $g(x) = x^2 - x - 1$ sur $\mathbb{R}$.
2. La courbe $\mathscr{C}_h$ de la fonction $h(x) = x^2 - 5x + 2$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -2x + 6$.

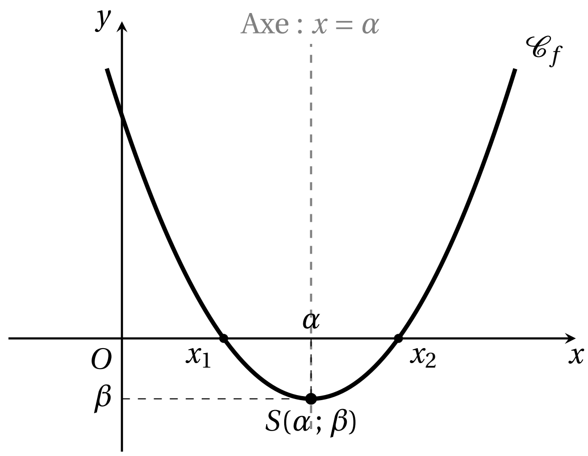
IV. Représentation graphique et variations

4.1 La parabole

Propriété 8 — *Éléments géométriques de la courbe*

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Sa courbe représentative dans un repère est une courbe géométrique appelée **parabole**.

1. Le sommet S de cette parabole a pour coordonnées $(\alpha\,;\,\beta)$ où les réels α et β sont les coefficients issus de la forme canonique : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
2. La parabole admet pour axe de symétrie la droite verticale d'équation $x = \alpha$.



Méthode 26. Déterminer graphiquement les valeurs de α et β
Le sommet de la parabole a pour coordonnées $(\alpha\,;\beta)$. On lit donc directement ces valeurs sur le graphique :

- α se lit sur l'axe horizontal (abscisse du sommet).
- β se lit sur l'axe vertical (ordonnée du sommet).

Exercice 27. Une fonction f du second degré est représentée par une parabole de sommet $S(3\,;-4)$. On sait de plus que $f(5) = 8$. Déterminer les valeurs de α et β, puis l'expression globale de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

4.2 Variations de la fonction

Propriété 9 *Tableaux de variations selon le coefficient principal*

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Ses variations dépendent de deux réels définis par $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$, ainsi que du signe du coefficient réel a :

- **Si $a > 0$:**

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Var. de f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

- **Si $a < 0$:**

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Var. de f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Exercice 28. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les coordonnées du sommet de la parabole associée, puis dresser son tableau de variations complet :

1. $f(x) = 2x^2 - 12x + 14$
2. $g(x) = -x^2 + 4x + 5$

Méthode 29. **Rechercher un extremum (Problèmes d'optimisation)**
Lorsqu'un problème est modélisé par une fonction du second degré, l'extremum (maximum ou minimum) se lit grâce au sommet de la parabole :

- Si $a > 0$, la fonction admet un **minimum** qui vaut β, atteint pour $x = \alpha$.
- Si $a < 0$, la fonction admet un **maximum** qui vaut β, atteint pour $x = \alpha$.

Exercice 30. Un artisan estime que le bénéfice réalisé pour la fabrication et la vente de x centaines d'objets est modélisé sur $[0; 10]$ par la fonction $B(x) = -2x^2+16x-14$ (en milliers d'euros). Déterminer le nombre d'objets à fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal, ainsi que le montant de ce bénéfice.