Récurrence

Classe de Terminale – Spécialité Mathématiques

I. Application directe

Exercice 1.

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si une propriété est héréditaire, alors elle est vraie pour tout entier naturel n.
2. Si une propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire, alors elle est vraie pour $n=1$.
3. Si une propriété est vraie pour $n=1$ et est héréditaire, alors elle est vraie pour $n=0$.
4. Si une propriété est vraie pour $n=0$ et $n=1$, alors elle est héréditaire.
5. Si une propriété est vraie pour $n=5$ et héréditaire à partir de $n=3$, alors elle est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 3.
6. Si une propriété est vraie pour $n=5$ et héréditaire à partir de $n=3$, alors elle est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 5.
7. Si une propriété est vraie pour $n=3$ et héréditaire à partir de $n \geqslant 1$, alors elle est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 3.
8. Si une propriété est vraie pour $n=3$ et héréditaire à partir de $n=5$, alors elle est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 5.

Exercice 2.

Démontrer par récurrence les propriétés de divisibilité suivantes :

1. Pour tout entier naturel n, 8^n-1 est un multiple de 7.
2. Pour tout entier naturel n, $3^{2n}-1$ est un multiple de 8.
3. Pour tout entier naturel n, 4^n+5 est un multiple de 3.
4. Pour tout entier naturel n, $n(n^2+5)$ est un multiple de 3.
5. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $\forall n \in \mathbb{N}$, 7^n+1 est divisible par 6 ».
   a) Démontrer que $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.
   b) Calculer 7^n+1 pour $n=0$ et $n=1$. La propriété $\mathscr{P}_n$ est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

Exercice 3.

Démontrer par récurrence les expressions des suites définies ci-dessous :

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+2n+2$.
   Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n=n(n+1)$.
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0=1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1}=2v_n-3$.
   Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n=3-2^{n+1}$.

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 2^n - 1$.
4. Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = \dfrac{1}{3}$ et pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} u_n$.
Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \dfrac{n}{3^n}$.

II. Exercices types

Exercice 4.

Chaque question est indépendante. Démontrer les énoncés par récurrence.

1. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la somme des n premiers entiers naturels vérifie :
$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.
3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
5. Pour tout entier $n \geqslant 2$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.
   a) Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4.
   b) Conjecturer l'expression de S_n en fonction de n puis la démontrer par récurrence.
7. Soit x un réel différent de 1. Pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.
8. Soit x un réel tel que $x \neq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)x^k = \frac{1 - (n+2)x^{n+1} + (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$.
9. Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n et démontrer ce résultat.
10. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 2$ par $u_n = \dfrac{n-1}{4} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
On pose $S_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_n$.
Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a $S_n = 1 - \left(\dfrac{n}{2} + 1\right) \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Exercice 5.

Démontrer par récurrence les inégalités d'ordre général suivantes :

1. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $2^n \geqslant n$.

2. Soit a un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n non nul, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
3. Soit a un réel tel que $a \geqslant 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $(1+a)^n \geqslant 1+na+\dfrac{n(n-1)}{2}a^2$.
4. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $5^n \geqslant 4^n+3^n$.
5. Pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $2^n > n^2$.

Exercice 6.

Démontrer par récurrence les majorations et encadrements simples portés sur les suites réelles suivantes :

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_0=-2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+3$.
   Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 6$.
2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+2n+1$.
   Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n^2$.
3. Soit la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}={u_n}^2+1$.
   Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, $u_n \geqslant 2^n$.
4. Soit a un réel strictement positif et (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant au_n$. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant a^n u_0$.
5. Soit la suite (t_n) définie par $t_0=5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1}=t_n-5n-4$.
   Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $t_n \leqslant -n^2$.
6. Soit a un réel tel que $0<a<1$ et (u_n) la suite définie par $u_0=a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n(1-u_n)$. Montrer que pour tout entier naturel n, $0<u_n<1$.

Exercice 7.

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$.
   a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, (u_n) est strictement positive et croissante.
   b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0<u_n<2$.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0=2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+5}$.
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2 \leqslant u_n<3$.
3. Soit (u_n) est définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$ pour tout entier n positif ou nul.
   Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

Exercice 8.

Soit (v_n) la suite définie par $v_0=1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1}=\sqrt{12+v_n}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0<v_n<4$.
2. On pose $w_n=4-v_n$. Démontrer que $w_{n+1}<\dfrac{1}{4}w_n$.
3. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n<\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}w_0$.

Exercice 9.

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

1. Soit la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-2}{x+1}$.
   a) Étudier les variations de la fonction f sur $[1; +\infty[$.
   b) En déduire que, pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f(x) \geqslant 1$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.
3. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 10.

1. Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 3$ et par $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{4}{u_n}\right)$.
   a) Étudier les variations sur $[2; 4]$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{4}{x}\right)$.
   b) En déduire que pour tout x de $[2; 4]$, $2 \leqslant f(x) \leqslant 4$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant u_n \leqslant 4$.
3. Déterminer le sens de variation de la suite u.
4. Soit a un paramètre réel strictement positif. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geqslant \sqrt{a}$ et $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Exercice 11.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 2]$. Montrer que si $x \in [1; 2]$ alors $f(x) \in [1; 2]$.
2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$
   a) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
      - Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.
      - Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leqslant v_n$.
      - Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
      - Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
   b) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.
   c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \geqslant 0$ et $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.
   d) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

Exercice 12.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = {u_n}^2 - u_n + 1$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n < 1$.

III. Exercices avancés

Exercice 13.

Dans tout l'exercice, on considère une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier $n \geqslant 0$.
On dit qu'elle est **universelle** lorsque $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. Par exemple, lorsque $\mathscr{P}(n)$ est la propriété « $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ », elle est universelle, et lorsque $\mathscr{P}(n)$ est la propriété « $(n+1)^2 = n^2 + 1$ » elle ne l'est pas (étant fausse pour $n = 1$, par exemple).
Pour chaque affirmation suivante, déterminer si elle est vraie (quel que soit le choix de la propriété $\mathscr{P}(n)$), fausse (pour au moins une propriété $\mathscr{P}(n)$), ou si elle n'a pas de sens logique.

1. Si $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{P}(n)$ est universelle.
2. Si $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{P}(n)$ est universelle.
3. Si $\mathscr{P}(1)$ est vraie et $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{P}(n)$ est universelle.
4. Si $\mathscr{P}(1)$ est vraie et $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(n+1)$ et $\mathscr{P}(n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\mathscr{P}(n)$ est universelle.
5. Si $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(2n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{P}(n)$ est universelle.
6. Si d'une part $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies, et d'autre part $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(2n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{P}(n)$ est universelle.
7. Si d'une part $\mathscr{P}(0)$ est vraie, et d'autre part $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(2n)$ et $\mathscr{P}(2n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{P}(n)$ est universelle.
8. Si d'une part $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies, et d'autre part $\mathscr{P}(n)$ implique $\mathscr{P}(2n)$ et $\mathscr{P}(3n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathscr{P}(n)$ est universelle.

Exercice 14.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note $n!$ (lire « factorielle de n ») le produit de tous les entiers strictement positifs de 1 à n : $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$. Par convention, $0! = 1$.
Montrer par récurrence que $n! > 2^n$ lorsque n est suffisamment grand (on précisera le rang initial).

Exercice 15.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Exercice 16.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on rappelle que $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 2 - \frac{1}{n!}$.

Exercice 17.

1. On pose $u = 2 + \sqrt{3}$ et $v = 2 - \sqrt{3}$.

a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe deux entiers positifs a_n et b_n tels que $u^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ et $v^n = a_n - b_n\sqrt{3}$.
Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

b) Établir les égalités $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ et $a_n \cdot b_{n+1} - a_{n+1} \cdot b_n = 1$.

2. Soit la suite (x_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_n = (\sqrt{2}+1)^n$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers naturels a_n et b_n tels que $x_n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

b) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

c) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$.

d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \sqrt{k_n} + \sqrt{k_n - 1}$ pour un certain entier k_n que l'on exprimera en fonction de a_n ou b_n selon la parité de n.

Exercice 18.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs tels que $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$.
Démontrer par récurrence que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant n$.