
Variables aléatoires discrètes

ECG1-Maths Approfondies-Jérémy Meynier

Table des matières

1	Variables aléatoires discrètes	1
1.1	Définition	1
1.2	Loi d'une variable aléatoire discrète	1
1.3	Fonction d'une variable aléatoire	3
2	Moments	3
2.1	Espérance	3
2.2	Théorème de transfert	4
2.3	Moments d'ordre r	5
3	Lois discrètes usuelles	8
3.1	Loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$	8
3.2	Loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	10
3.3	Tableau récapitulatif des lois usuelles	12

1 Variables aléatoires discrètes

1.1 Définition

Définition 1 (Variable aléatoire discrète)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire, et $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ l'ensemble des valeurs prises par X . On dit que X est une **variable aléatoire discrète** lorsque $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

Remarque 1: Si X est une variable aléatoire discrète on peut écrire $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$.

Exercice 2: On considère une urne contenant r boules rouges et b boules bleues. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'à obtenir pour la première fois une boule bleue. Soit X le nombre de tirages nécessaires (on pose $X = 0$ si on n'obtient jamais de boule bleue, par convention). Montrer que X est une variable aléatoire discrète.

Propriétés 2 (Système complet d'événements lié à une variable aléatoire discrète)

Soit X une variable aléatoire discrète, alors $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. En particulier,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x) = 1.$$

Démonstration :

◇ X est une variable aléatoire donc $\forall x \in X(\Omega), [X = x] \in \mathcal{A}$.

Si x et y sont deux éléments distincts de $X(\Omega)$, alors les événements $[X = x]$ et $[X = y]$ sont incompatibles.

De plus, $\bigcup_{x \in X(\Omega)} [X = x] = \Omega$.

Donc : $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

◇ La σ -additivité de $\mathbf{P}$ donne ensuite :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in X(\Omega)} [X = x]\right) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

On a bien $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x) = 1$

Définition 3 (Tribu associée à une variable aléatoire discrète)

Soit X une variable aléatoire discrète. On appelle **tribu associée** à X la tribu engendrée par le système complet d'événements $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$. On la note $\mathcal{A}_X$.

Remarque 3: Cette tribu est l'ensemble des événements dont on peut dire s'ils se sont réalisés ou non lorsqu'on connaît la valeur de X .

1.2 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 4 (Loi d'une variable aléatoire discrète)

Soit X une variable aléatoire discrète, on appelle **loi de X** la donnée de $X(\Omega)$ et des valeurs $\mathbf{P}(X = x_k)$ pour x_k parcourant $X(\Omega)$.

Propriétés 5

Soit $(p_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que p_k est le terme général d'une série convergente à termes positifs vérifiant $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.
Alors $\mathbb{N}$ et $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ forment la loi d'une variable aléatoire discrète.

Démonstration :

On pose $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbf{P}$ la probabilité telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\{k\}) = p_k$.

Soit X la fonction identité, c'est une variable aléatoire réelle car $\forall x \in \mathbb{R}$, $[X \leq x] = \bigcup_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \{k\} \in \mathcal{A}$.

C'est de plus une variable aléatoire discrète car $X(\Omega) = \mathbb{N}$ est dénombrable.

Ainsi : $\mathbb{N}$ et $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ forment la loi d'une variable aléatoire discrète.

Exercice 4: Soit $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X = i) = \frac{1}{i(i+1)}$. Justifier que X est une variable aléatoire discrète.

On utilise le résultat précédent, en posant $p_i = \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$.

◇ $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{i(i+1)} \geq 0$

◇ $\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$ est le terme général d'une série télescopique convergente (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$). Il ne reste plus qu'à calculer la somme de la série :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi : X est bien une variable aléatoire discrète

Propriétés 6 (Caractérisation de la loi par la fonction de répartition)

Soit X une variable aléatoire discrète et F_X sa fonction de répartition. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ x_k \leq x}} \mathbf{P}(X = x_k)$.

Réciproquement, si $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}^*\}$ où les x_i sont classés par ordre croissant, alors :

$$\mathbf{P}(X = x_1) = F_X(x_1) \text{ et, } \forall k \geq 2, \mathbf{P}(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}).$$

Démonstration :

◇ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[X \leq x] = \bigcup_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ x_k \leq x}} [X = x_k]$.

Or les événements $[X = x_k]$ sont incompatibles deux à deux. Par additivité de la probabilité, on obtient donc :

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ x_k \leq x}} \mathbf{P}(X = x_k)$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ x_k \leq x}} \mathbf{P}(X = x_k)$

◇ Si $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}^*\}$, le cas $x = x_1$ nous donne alors directement $\mathbf{P}(X = x_1) = F_X(x_1)$.

Et si $k \geq 2$,

$$F_X(x_k) = \sum_{i=1}^k \mathbf{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}(X = x_i) + \mathbf{P}(X = x_k) = F_X(x_{k-1}) + \mathbf{P}(X = x_k)$$

Ainsi : $\mathbf{P}(X = x_1) = F_X(x_1)$ et, $\forall k \geq 2, \mathbf{P}(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$

1.3 Fonction d'une variable aléatoire

Propriétés 7

Soit X une variable aléatoire discrète, et f une fonction réelle telle que $X(\Omega) \subset D_f$. La fonction $Y = f(X)$ définie sur Ω par $Y(\omega) = f(X(\omega))$ est également une variable aléatoire discrète.

Démonstration :

Faisons la démonstration dans le cas où $X(\Omega)$ est dénombrable. Il suffira de remplacer « dénombrable » par « fini » pour le cas où $X(\Omega)$ est fini.

◇ Montrons tout d'abord que Y est bien une variable aléatoire.

La fonction $Y = f \circ X$ est définie sur Ω (car $X(\Omega) \subset D_f$) à valeurs réelles. De plus,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, [Y \leq x] &= [f \circ X \leq x] \\ &= \bigcup_{y \in Y(\Omega), y \leq x} [f \circ X = y] \\ &= \bigcup_{y \in Y(\Omega), y \leq x} \bigcup_{z \in X(\Omega), f(z)=y} [X = z]. \end{aligned}$$

Or X est une variable aléatoire, donc $[X = z] \in \mathcal{A}$. Comme $X(\Omega)$ est dénombrable, la stabilité des tribus par union dénombrable donne $[Y \leq x] \in \mathcal{A}$.

Donc Y est bien une variable aléatoire.

◇ De plus, comme $X(\Omega)$ est dénombrable, $Y(\Omega) = f(X(\Omega))$ est dénombrable ou fini.

Ainsi : $f \circ X$ est une variable aléatoire discrète.

2 Moments

2.1 Espérance

Définition 8 (Espérance d'une variable aléatoire discrète)

Soit X une variable aléatoire discrète, et $X(\Omega) = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$. On dit que X admet une **espérance** lorsque la série de terme général $x_n \mathbf{P}(X = x_n)$ est absolument convergente, et on a alors :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbf{P}(X = x_n)$$

Remarque 5: Contrairement aux variables aléatoires finies, l'espérance d'une variable aléatoire discrète peut ne pas exister.

Exercice 6: Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X = i) = \frac{1}{i(i+1)}$. X admet-elle une espérance ?

$$\sum |i\mathbf{P}(X = i)| = \sum \frac{i}{i(i+1)} = \sum \frac{1}{i+1}.$$

On reconnaît la série harmonique (à un décalage d'indice près), qui diverge.

Donc : X n'admet pas d'espérance.

2.2 Théorème de transfert

Théorème 9 (Théorème de transfert pour une variable aléatoire discrète)

Soit X une variable aléatoire discrète, avec $X(\Omega) = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$, et f une fonction réelle telle que $X(\Omega) \subset D_f$. On pose $Y = f(X)$.

La variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum f(x_n)P(X = x_n)$ converge absolument. Dans ce cas :

$$E(Y) = E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\mathbf{P}(X = x_n).$$

Exercice 7: Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$. Montrer que $\frac{1}{X+1}$ admet une espérance et la calculer.

◇ D'après le théorème de transfert $\frac{1}{X+1}$ admet une espérance si et seulement si $\sum \frac{1}{1+n}\mathbf{P}(X = n)$ converge absolument.

Cette série étant à termes positifs la convergence implique la convergence absolue.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+n}\mathbf{P}(X = n) &= \frac{1}{1+n} \times \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(n+1)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \times \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

On reconnaît une série exponentielle convergente, donc par théorème de transfert, et donc : $\frac{1}{X+1}$ admet une espérance.

◇ On a alors :

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{X+1}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \times \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} - \frac{\lambda^0}{0!} \right) \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^\lambda - 1) \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \end{aligned}$$

Ainsi : $E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$

Propriétés 10 (Linéarité de l'espérance)

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance, et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Alors $aX + b$ admet une espérance, et $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Démonstration :

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance, avec $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$.

◇ Les séries $\sum x_k \mathbf{P}(X = x_k)$ et $\sum \mathbf{P}(X = x_k)$ convergent absolument. Or :

$$|(ax_k + b)\mathbf{P}(X = x_k)| \leq |a| \times |x_k \mathbf{P}(X = x_k)| + |b| \times |\mathbf{P}(X = x_k)|$$

Par opérations sur les séries convergentes, $\sum |a||x_k \mathbf{P}(X = x_k)| + |b|\mathbf{P}(X = x_k)$ converge.

Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum |(ax_k + b)\mathbf{P}(X = x_k)|$ converge.

On en déduit, par le théorème de transfert, que $aX + b$ admet une espérance.

◇ On a alors, toujours par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (ax_k + b)\mathbf{P}(X = x_k) \\ &= a \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbf{P}(X = x_k) + b \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_k) \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

Ainsi : $E(aX + b) = aE(X) + b$

2.3 Moments d'ordre r**Définition 11** (Moment)

Soit X une variable aléatoire discrète, et $r \in \mathbb{N}$ tel que X^r admet une espérance. On appelle alors **moment d'ordre r** de X le réel $m_r(X)$ tel que

$$m_r(X) = E(X^r) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r \mathbf{P}(X = x)$$

Définition 12 (Moment centré)

Soit X une variable aléatoire discrète, et $r \in \mathbb{N}$, tel que $(X - E(X))^r$ admet une espérance. On appelle alors **moment centré d'ordre r** de X le réel $\mu_r(X)$ tel que

$$\mu_r(X) = E((X - E(X))^r) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^r \mathbf{P}(X = x)$$

Propriétés 13

Soit X une variable aléatoire discrète, et $r \in \mathbb{N}$.

1. Si X admet un moment d'ordre r alors, pour tout $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$, X admet un moment d'ordre k .
2. X admet un moment d'ordre r si et seulement si X admet un moment centré d'ordre r .

Démonstration :

1. Si X admet un moment d'ordre r alors, pour tout $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$, X admet un moment d'ordre k .

On pose $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$.

◊ Si $|x_i| \geq 1$ alors on a $|x_i|^k \leq |x_i|^r$

◊ Si $|x_i| < 1$ alors ce résultat est faux mais on peut écrire, comme $|x_i|^k \leq 1$, $|x_i|^k \leq 1 + |x_i|^r$.

Finalement, dans les deux cas, on a $|x_i|^k \leq 1 + |x_i|^r$ et il en résulte que :

$$|x_i|^k \mathbf{P}(X = x_i) \leq \mathbf{P}(X = x_i) + |x_i|^r \mathbf{P}(X = x_i).$$

Mais la série $\sum \mathbf{P}(X = x_i)$ est convergente et par hypothèse, la série $\sum |x_i|^r \mathbf{P}(X = x_i)$ l'est aussi.

Par opérations sur les séries convergentes, $\sum (\mathbf{P}(X = x_i) + |x_i|^r \mathbf{P}(X = x_i))$ converge.

Enfin, par comparaison de séries à termes positifs, il en résulte que la série $\sum |x_i|^k \mathbf{P}(X = x_i)$ converge.

Ainsi : X admet un moment d'ordre k .

2. X admet un moment d'ordre r si et seulement si X admet un moment centré d'ordre r .

Faisons la démonstration dans le cas où $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

X admet un moment d'ordre r si et seulement si $\sum_{k \geq 0} k^r \mathbf{P}(X = k)$ converge.

X admet un moment centré d'ordre r si et seulement si $\sum_{k \geq 0} |k - E(X)|^r \mathbf{P}(X = k)$ converge.

Or les termes sont tous positifs, et $|k - E(X)|^r \mathbf{P}(X = k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} k^r \mathbf{P}(X = k)$, donc on peut conclure (critère par équivalence) que ces deux séries ont même nature.

Ainsi : X admet un moment d'ordre r si et seulement si X admet un moment centré d'ordre r .

Définition 14 (Variance)

Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2. On appelle **variance** de X , notée $V(X)$, le moment centré d'ordre 2 de X .

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

Remarque 8: Si X admet une variance, alors X admet un moment centré d'ordre 2, donc un moment d'ordre 2, donc un moment d'ordre 1, donc une espérance.

Définition 15 (Écart-type)

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. On appelle **écart-type** de X , notée $\sigma(X)$, la quantité $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriétés 16

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. Alors, si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ admet une variance, et $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Démonstration :

◊ $aX + b$ admet une variance si et seulement elle admet un moment centré d'ordre 2.

X admettant une variance, elle a donc un moment d'ordre 1, donc $aX + b$ admet un moment d'ordre 1.

On a $(aX + b - E(aX + b))^2 = (aX + b - aE(X) - b)^2 = a^2(X - E(X))^2$.

X admet un moment centré d'ordre 2, donc $(X - E(X))^2$ admet une espérance, donc $a^2(X - E(X))^2$ admet une espérance.

Ainsi $aX + b$ admet un bien moment centré d'ordre 2, et donc $aX + b$ admet une variance.

◇ Par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= E((aX + b - E(aX + b))^2) \\ &= E((aX + b - aE(X) - b)^2) \\ &= a^2 E((X - E(X))^2) \\ &= a^2 V(X) \end{aligned}$$

Donc : $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Propriétés 17

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance et telle que $V(X) \neq 0$.

Alors $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée et réduite.

Démonstration :

X^* étant une transformation affine de X , qui a une variance, elle a une variance, et donc une espérance.

Par propriétés de l'espérance et de la variance, on a alors toujours :

$$E(X^*) = \frac{E(X) - E(X)}{\sigma(X)} = 0 \quad \text{et} \quad V(X^*) = \frac{V(X)}{(\sigma(X))^2} = 1.$$

Ainsi : X^* est une variable aléatoire centrée et réduite.

Théorème 18 (Formule de Koenig-Huygens)

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. Alors $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

Démonstration :

Soit $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$. D'après le théorème de transfert appliqué à $f : x \mapsto (x - E(X))^2$, on a :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(f(X)) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} (x_i - E(X))^2 \mathbf{P}(X = x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} (x_i^2 - 2x_i E(X) + E^2(X)) \mathbf{P}(X = x_i) \end{aligned}$$

X admettant un moment d'ordre 2 (et donc un moment d'ordre 1), $\sum x_i^2 \mathbf{P}(X = x_i)$ et $\sum x_i \mathbf{P}(X = x_i)$ convergent.

De plus on sait que $\sum \mathbf{P}(X = x_i)$ converge. Ainsi, par linéarité, on obtient :

$$\begin{aligned} V(X) &= \underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty} x_i^2 \mathbf{P}(X = x_i)}_{E(X^2)} - 2E(X) \underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty} x_i \mathbf{P}(X = x_i)}_{E(X)} + E^2(X) \underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_i)}_1 \\ &= E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X) \\ &= E(X^2) - E^2(X) \end{aligned}$$

Ainsi : $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$

Propriétés 19 (Variable aléatoire admettant une variance nulle)

Si X est une variable aléatoire discrète de variance nulle, alors il existe un réel a pour lequel $\mathbf{P}(X = a) = 1$, et on dit que X est une variable **quasi-certaine**.

Démonstration :

Soit X une variable discrète avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$.

Si $V(X) = 0$ alors $\sum_{i=0}^{+\infty} (x_i - E(X))^2 \mathbf{P}(X = x_i) = 0$ et comme il s'agit de la somme d'une série à termes positifs :

$$\forall i \in \mathbb{N}, (x_i - E(X))^2 \mathbf{P}(X = x_i) = 0$$

Si $x_i \neq E(X)$, alors $\mathbf{P}(X = x_i) = 0$. Et donc, $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_i) = \mathbf{P}(X = E(X))$.

Or $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_i) = 1$. En notant $a = E(X)$, on a bien $\mathbf{P}(X = a) = 1$.

Ainsi : Si $V(X) = 0$ alors l'événement $[X = E(X)]$ est quasi-certain.

3 Lois discrètes usuelles

3.1 Loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$

Définition 20 (Loi géométrique)

Une variable aléatoire X suit la **loi géométrique** de paramètre $p \in]0, 1[$ lorsque :

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(X = n) = (1 - p)^{n-1} p$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

Démonstration :

Il faut montrer que ces propriétés permettent bien de définir une loi de variable aléatoire :

- ◇ Il est immédiat que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (1 - p)^{n-1} p \geq 0$.
- ◇ Par ailleurs, $\sum (1 - p)^{n-1} p = \frac{p}{1 - p} \sum (1 - p)^n$ est une série géométrique convergente, puisque $|1 - p| < 1$.
Donc la série converge, et sa somme vaut :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - p)^{n-1} p = p \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - p)^n = p \times \frac{1}{1 - (1 - p)} = 1.$$

Ainsi : La loi géométrique est bien la loi d'une variable aléatoire.

Méthode 21 (Modélisation et rédaction pour utiliser la loi géométrique)

Modélisation : On considère une expérience consistant en une suite infinie d'épreuves mutuellement indépendantes, chaque épreuve ayant deux issues possibles : succès avec probabilité p et échec avec probabilité $1 - p$. La variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès suit la loi géométrique de paramètre p .

Rédaction : On écrira « On appelle succès l'événement de probabilité p . Alors la variable aléatoire X , qui compte le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès en répétant indépendamment l'expérience de Bernoulli associée, suit la loi géométrique de paramètre p ».

Exercice 9: On considère une urne contenant 2 boules blanches et 1 boule noire. On tire indéfiniment une boule dans cette urne avec remise. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule noire. Donner la loi de X .

On appelle succès l'événement « obtenir une boule noire » de probabilité $\frac{1}{3}$.

Alors la variable aléatoire X , qui compte le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès en répétant indépendamment l'expérience de Bernoulli associée, suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

Donc : $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$

Propriétés 22 (Fonction de répartition de la loi géométrique)

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, avec $p \in]0, 1[$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X \leq n) = 1 - (1 - p)^n$

Démonstration :

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. On obtient par calcul direct, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \leq n) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^n X = k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X = k) \quad \text{par incompatibilité des événements deux à deux} \\ &= \sum_{k=1}^n (1 - p)^{k-1} p \\ &= p \sum_{i=0}^{n-1} (1 - p)^i \quad \text{en posant } i = k - 1 \\ &= p \times \frac{1 - (1 - p)^n}{1 - (1 - p)} \\ &= 1 - (1 - p)^n. \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(X \leq n) = 1 - (1 - p)^n$

Propriétés 23 (Espérance et variance de la loi géométrique)

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, avec $p \in]0, 1[$. Alors X admet une variance et une espérance, et $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{1 - p}{p^2}$

Démonstration :

► $\sum |n\mathbf{P}(X = n)| = \sum n(1 - p)^{n-1} p.$

$|1 - p| < 1$, donc $\sum n(1 - p)^{n-1}$ est une série géométrique dérivée première convergente, et donc $\sum n(1 - p)^{n-1} p$ converge.

Ainsi, l'espérance de X existe et vaut :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}p \\ &= p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &= p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Ainsi : X admet une espérance et $E(X) = \frac{1}{p}$

► $|n^2 \mathbf{P}(X = n)| = n^2(1-p)^{n-1}p = p((1-p)n(n-1)(1-p)^{n-2} + n(1-p)^{n-1}).$

$\sum n(n-1)(1-p)^{n-2}$ et $\sum n(1-p)^{n-1}$ convergent, en tant que séries géométriques dérivées de raison $|1-p| < 1$.

Ainsi, par opérations sur les séries convergentes, $\sum |n^2 \mathbf{P}(X = n)|$ converge, donc X admet un moment d'ordre 2.

En suivant cette décomposition, on trouve :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2(1-p)^{k-1}p \\ &= p(1-p) \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &= p(1-p) \times \frac{2}{(1-(1-p))^3} + E(X) \\ &= \frac{2-2p}{p^2} + \frac{1}{p} \\ &= \frac{2-p}{p^2}. \end{aligned}$$

La formule de Huygens donne alors $V(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$

Ainsi : X admet une variance et $V(x) = \frac{1-p}{p^2}$

3.2 Loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

Définition 24 (Loi de Poisson)

Une variable aléatoire X suit la **loi de poisson** de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ lorsque :

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Démonstration :

Il faut montrer que ces propriétés permettent bien de définir une loi de variable aléatoire.

◇ Il est immédiat que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \geq 0$.

◇ Par ailleurs, $\sum \frac{\lambda^n}{n!}$ est une série exponentielle convergente, donc $\sum e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ converge, et sa somme vaut :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi : La loi de Poisson est bien la loi d'une variable aléatoire.

Remarque 10: La loi de Poisson sert, la plupart du temps à modéliser des phénomènes « rares ». Il n'existe pas vraiment de cas typique ou de rédaction modèle pour cette loi. Elle sera toujours introduite par l'énoncé de l'exercice.

Propriétés 25 (Espérance et variance de la loi de Poisson)

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Alors X admet une variance et une espérance, et $E(X) = V(X) = \lambda$

Démonstration :

► X admet une espérance si et seulement si $\sum n\mathbf{P}(X = n)$ converge absolument. La série étant à termes positifs, la convergence est suffisante. Soit $N \geq 1$ et (S_N) la suite des sommes partielles de la série.

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{k=0}^N k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= 0 + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^N \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\lambda^i}{i!} \text{ en posant } i = k - 1 \end{aligned}$$

En tant que somme partielle d'une série exponentielle, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{\lambda}$, donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$.

Donc : X admet une espérance, et $E(X) = \lambda$

► Montrons que X admet une variance en étudiant la convergence de $\sum |n^2 \mathbf{P}(X = n)|$, puis calculons-là :

$$\diamond |n^2 \mathbf{P}(X = n)| = n(n-1) \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} + n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$\sum \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$ et $\sum \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}$ convergent en tant que séries exponentielles.

Donc par opérations sur les séries convergentes, $\sum |n^2 \mathbf{P}(X = n)|$ converge.

Ainsi X admet un moment d'ordre 2, et donc une variance.

◇ On a alors :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} + E(X) \text{ en posant } i = k - 2 \\ &= \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

La formule de Huygens donne alors $V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Ainsi : X admet une variance et $V(X) = \lambda$

3.3 Tableau récapitulatif des lois usuelles

Propriétés 26 (Tableau récapitulatif des lois usuelles)

X	$X(\Omega)$	$\mathbf{P}(X = k)$	$E(X)$	$V(X)$
Certaine	$\{a\}$	1	a	0
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$	$\llbracket 1, n \rrbracket$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$	$\llbracket a, b \rrbracket$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	$1-p$ ou p	p	$p(1-p)$
Binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Géométrique : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ