

1 Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, 2x - y, x - 3y)$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x + y - 1$.
3. $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z, t) = x - t$.
4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par $f(x) = (x, 0, x, 0)$.
5. $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = X(P + P(2))$.
6. $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(P) = (P(1), P(2))$.
7. $\varphi : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = f(1)$.
8. $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f' - 2f$.
9. $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f' - f^2$.

2 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x - z)$. Justifier que f est linéaire, déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

3 Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que si $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p))$ est une famille libre alors $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est une famille libre.

4 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E tel que $f \circ g = \text{Id}_E$.

1. Démontrer que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$.
2. Démontrer que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$.
3. Démontrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$.

5 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n .

1. Démontrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) \Rightarrow \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.
2. (a) Démontrer que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.
(b) En déduire $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \Leftrightarrow E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

6 Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et f un endomorphisme nilpotent d'indice p ($f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$, $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$).

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ soit libre.
2. En déduire $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

7 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , et f un endomorphisme de E .
Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f) \Leftrightarrow f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $n = 2 \text{rg}(f)$.

8 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $E = \text{Im}(u) + \text{Im}(v) = \text{Ker}(u) + \text{Ker}(v)$.
Montrer que $\text{Im}(u)$ et $\text{Im}(v)$ sont supplémentaires dans E , tout comme $\text{Ker}(u)$ et $\text{Ker}(v)$.

9 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$, p un projecteur. Montrer $p \circ f = f \circ p \Leftrightarrow \text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont stables par f .

10 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto (P(1), P'(1), \dots, P^{(n)}(1)) \end{cases}$. Montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme.

11 Soit E un espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 5f + 6\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 3\text{Id}_E) = E$.

12 Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est une famille liée.
L'objet de cet exercice est de montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \text{Id}_E$.

1. Montrer que : $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
2. Montrer que si x et y sont colinéaires et non nuls alors $\lambda_x = \lambda_y$.
3. Montrer que si (x, y) est libre $\lambda_x = \lambda_y$. *Indication* : Calculer de deux façons différentes $f(x + y)$.
4. Conclure.

13 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.

14 Soit f l'application définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ par $f(P) = \int_0^1 P(t) dt$.

1. Vérifier que f est une forme linéaire, et déterminer $\operatorname{Im}(f)$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

15 Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $w = v \circ u$.
Montrer que w est un isomorphisme $\Leftrightarrow u$ est injective, v est surjective et $\operatorname{Im}(u) \oplus \operatorname{Ker}(v) = F$.

16 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E .

1. Montrer que $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Im}(q) \Leftrightarrow p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Ker}(q) \Leftrightarrow p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.
3. Montrer que $p + q$ est un projecteur $\Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
4. Montrer alors, si $p + q$ est un projecteur, que $\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q)$ et $\operatorname{Ker}(p + q) = \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(q)$.

17 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $p, q \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p + q = Id_E$ et $\operatorname{rg}(p) + \operatorname{rg}(q) \leq \dim(E)$.
Montrer que p et q sont des projecteurs.

18 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.
Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^3$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^3, f(x) = \varphi(x) a$.